DE GASPARIS

MOTO PARABOLICO DELLE COMETE

SOPRA UNA EQUAZIONE

CHE HA LUOGO NELLA TEORIA

DEL MOTO PARABOLICO DELLE COMETE



NOTA

PER

A. DE GASPARIS



Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli
Fascicolo 12.° — Dicembre 1863.

Stamperia del Fibreno 1863



La determinazione degli elementi della trajettoria di un corpo celeste da osservazioni fatte sulla terra, offre minori difficoltà nel caso che la curva descritta è una parabola, anzichè un ellisse od una iperbola, ed è naturale che questa ricerca fu la prima ad essere trattata. La prima soluzione ne è dovuta al Newton, ed è noto che l'Halley ebbe a farne uso, acquistandosi la gloria di scoprire il periodo della cometa che porta il suo nome. Tuttavia i trovati dell'immortale filosofo inglese lasciavano ben molto a desiderare (ed altrettanto poteva dirsi de'metodi de'geometri posteriori i quali per la maggior parte non avevano operato che delle trasformazioni analitiche su teoremi di lui) prima che l'Olbers, valendosi di una rimarchevolissima equazione trovata dal Lambert, non ebbe fatta nota la sua soluzione. Ora il metodo di Olbers che pe'suoi pregi ha ottenuto incontestabile buon successo sugli altri, e quindi è quasi esclusivamente messo in pratica, presenta la necessità di richiedere l'impiego delle false posizioni, ch'è d'uopo adoperare non sopra una sola, ma sopra un sistema di più equazioni. Il problema infatti è ridotto alla determinazione di quattro incognite fra quattro equazioni, delle quali le prime tre sono del secondo grado, e la quarta di grado superiore. In tale stato di cose è permesso il sospettare che si possa far meglio, stantechè nella stessa prima approssimazione di un'orbita ellittica hanno a trattarsi equazioni più semplici. Ben è vero che queste ultime formole potrebbero adoperarsi anche pel calcolo dell'orbita di una cometa, per

essersi ne' primi passi delle operazioni numeriche adoperati teoremi che hanno luogo qualunque sia la sezione conica percorsa dal mobile, ma è vero altresì che il caso speciale del moto nella parabola deve dar luogo a delle semplificazioni, quali non potrebbero aver luogo nel caso generale. Ciò in realtà avviene, ed in questo lavoro mi propongo di mostrare come questo scopo possa essere raggiunto. Dopo aver dedotta una equazione estremamente semplice fra la corda che unisce i luoghi corrispondenti alla prima e terza osservazione, il tempo interposto, ed il raggio vettore della osservazione intermedia, ne fo uso per formare una equazione del secondo grado contenente come sola incognita la distanza accorciata della prima osservazione. Tale equazione è esatta fino alle quantità di secondo ordine comprese, e lo è molto più quando i tempi delle osservazioni estreme equidistano, o presso a poco, da quello della intermedia. In questo modo il metodo di Olbers viene ad essere corretto dell' unico inconveniente che presenta nei non brevi tentativi preliminari.

Contrasegnino i simboli r, c rispettivamente il raggio vettore e la corda dell' arco parabolico percorso dalla cometa di cui siano $x\ y\ z$ le coordinate eliocentriche. Sia t il tempo di una osservazione; $kdt = d\tau$, e $\log k = 8.2355814$. Ai precedenti simboli saran dati come indici i numeri 1, 2, 3 secondochè si riferiranno alla prima, seconda, terza, osservazione. Fatto

$$k(t_2 - t_1) = \theta_{12} \quad ; \quad k(t_3 - t_2) = \theta_{32} \quad ; \quad k(t_3 - t_1) = \theta_{13}$$

svilupperemo i valori delle quantità relative alla prima e terza osservazione in funzione di quelle della seconda, ed avremo

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= r_2^2 - \theta_{12}\frac{d.r_2^2}{d\tau} + \frac{\theta_{12}^2}{2}\frac{d^2 r_2^2}{d\tau^2} - \frac{\theta_{12}^3}{6}\frac{d^3 r_2^2}{d\tau^3} \\ r_3^2 &= r_2^2 + \theta_{32}\frac{d.r_2^2}{d\tau} + \frac{\theta_{32}^2}{2}\frac{d^2 r_2^2}{d\tau^2} + \frac{\theta_{32}^3}{6}\frac{d^3 r_2^2}{d\tau^3} \\ x_1 &= x_2 - \theta_{12}\frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\theta_{12}^2}{2}\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} - \frac{\theta_{12}^3}{6}\frac{d^3 x_2}{d\tau^3} \\ x_3 &= x_2 + \theta_{32}\frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\theta_{32}^2}{2}\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \frac{\theta_{32}^3}{6}\frac{d^3 x_2}{d\tau^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (A)$$

e così per y_1, y_3, z_1, z_3.

Intanto avendosi

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

differenziando verrà

$$d.r_2^2 = 2r_2 dr_2 = 2x_2 dx_2 + 2y_2 dy_2 + 2z_2 dz_2$$

e differenziando nuovamente

$$\frac{d^2 r_2^2}{d\tau^2} = 2\,\frac{dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2}{d\tau^2} + 2\,\frac{x_2 d^2 x_2 + y_2 d^2 y_2 + z_2 d^2 z_2}{d\tau^2}$$

ma per le equazioni del moto si ha

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\frac{x_2}{r_2^3} \quad ; \quad \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} = -\frac{y_2}{r_2^3} \quad ; \quad \frac{d^2 z_2}{d\tau^2} = -\frac{z_2}{r_2^3}$$

e perchè il moto ha luogo nella parabola si verifica l'altra equazione

$$\frac{dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2}{d\tau^2} = \frac{2}{r_2}$$

avremo dunque

$$\frac{d^2 r_2^2}{d\tau^2} = \frac{2}{r_2}\,, \quad \text{e} \quad \frac{d^3 r^2}{d\tau^3} = -\frac{2\,dr_2}{r_2^2\,d\tau}$$

sostituendo perciò nelle equazioni (A) tali valori avremo

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= r_2^2 - 2\theta_{12} r_2 \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\theta_{12}^2}{2}\frac{2}{r_2} + \frac{\theta_{12}^3}{6}\frac{2\,dr_2}{r_2^2\,d\tau} \\ r_3^2 &= r_2^2 + 2\theta_{23} r_2 \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\theta_{23}^2}{2}\frac{2}{r_2} - \frac{\theta_{23}^3}{6}\frac{2dr_2}{r_2^2 d\tau} \\ x_1 &= x_2 - \theta_{12}\frac{dx_2}{d\tau} - \frac{\theta_{12}^2}{2}\frac{x_2}{r_2^3} + \frac{\theta_{12}^3}{6}\left(\frac{r_2 dx_2 - 3x_2 dr_2}{r_2^4 d\tau}\right) \\ x_3 &= x_2 + \theta_{23}\frac{dx_2}{d\tau} - \frac{\theta_{23}^2}{2}\frac{x_2}{r_2^3} - \frac{\theta_{23}^3}{6}\left(\frac{r_2 dx_2 - 3x_2 dr_2}{r^4 d\tau}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (B)$$

e così similmente per le altre coordinate.

D'altra parte indicando con c_{13} la corda che unisce i punti dell'orbita

**

occupati dalla cometa ai tempi della prima e terza osservazione, si ha evidentemente

$$c_{13}^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2(x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3)$$

sostituendo in questa espressione, nel secondo membro, i valori corrispondenti dati delle equazioni (*B*) si trova l'equazione semplicissima

$$c_{13}^2 = \frac{2\theta_{13}^2}{r_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

ed il termine che segue, ove si tenga conto de' termini moltiplicati per le terze potenze del tempo, è

$$(\theta_{32} - \theta_{21})\theta_{13}^2 \frac{dr_2}{r_2^2 d\tau}$$

quindi l'equazione (*C*) riesce meglio approssimata nel caso che l'istante della osservazione intermodia dista egualmente dalle estreme.

L'equazione (*C*) costituisce già per se stessa un teorema rimarchevole, ma per l'utile applicazione che può farsene, riducendo il problema (per raggiungere una prima approssimazione) ad una equazione di secondo grado, la sua importanza riesce anche maggiore.

Infatti moltiplicando ambo i membri della prima delle equazioni (*B*) per θ_{23}, o quelli della seconda per θ_{12}, sommando si ottiene

$$\theta_{32} r_1^2 + \theta_{21} r_3^2 = \theta_{31} r_2^2 + \frac{\theta_{32}\theta_{21}\theta_{13}}{r_2}$$

ed a motivo della (*C*) si avrà

$$\theta_{32} r_1^2 + \theta_{21} r_3^2 = \theta_{31} r_2^2 + \frac{\theta_{32}\theta_{21} c_{13}^2}{2\theta_{13}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

ed il termine seguente, introducendo i termini co'cubi dei tempi sarebbe

$$-\frac{1}{6}\theta_{32}\theta_{21}\theta_{13}(\theta_{32} - \theta_{21})\frac{dr_2}{r_2^2 d\tau}$$

di guisa che l'equazione (*D*) risulta meglio vicina alla vera nel caso di

$\theta_{12} = \theta_{23}$ cioè di equidistanza della prima e terza osservazione dalla seconda.

Ciò posto, le formole nel metodo di Olbers sono le seguenti

$$
\left.
\begin{aligned}
r_1^2 &= A\,\rho_1^2 + B\,\rho_1 + C \\
r_3^2 &= A_1\rho_1^2 + B_1\rho_1 + C_1 \\
c_{13}^2 &= A_2\rho_1^2 + B_2\rho_1 + C_2 \\
(r_1 + r_3 + c_{13})^{\frac{3}{2}} &- (r_1 + r_3 - c_{13})^{\frac{3}{2}} = 6k\,(t_3 - t_1)
\end{aligned}
\right\} \quad . \;\; . \;\; . \;\; E)
$$

nelle quali ρ_1 è la distanza accorciata della prima osservazione ed A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 sono quantità note, e tali coefficienti delle equazioni (E) debbono essere preparati e numericamente calcolati ove si voglia calcolar l'orbita col metodo di Olbers. Ciò che v'è di più a farsi per aver a trattare una equazione di secondo grado, posto il sistema delle (E) consiste nel determinare i coefficienti dell'altra equazione

$$
r_2^2 = A_3\rho_1^2 + B_3\rho_1 + C_3 \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \quad (F)
$$

ed affinchè si scorga come ciò possa ottenersi agevolmente trovo utile di dare esplicitamente le espressioni di tali coefficienti in funzione de' dati delle osservazioni.

Posto adunque

$$
M_1 = \frac{\theta_{23}\, tg\beta_2\, sen\,(l_3 - \alpha_3) - tg\beta_3\, sen\,(l_3 - \alpha_2)}{\theta_{23}\, tg\beta_1\, sen\,(l_2 - \alpha_2) - tg\beta_2\, sen\,(l_2 - \alpha_1)}
$$

si ha

$$
A_3 = M_1^2\, sec^2\beta_2 \quad ; \quad B_3 = 2\,M_1 R_2\, cos\,(l_2 - \alpha_2) \quad ; \quad C_3 = R_2^2
$$

poichè l'equazione (F) si è dedotta dall'altre notissime

$$
r_2^2 = sec^2\beta_2\,\rho_2^2 + 2\,R_2 cos(l_2 - \alpha_2)\,\rho_2 + R_2^2 \quad ; \quad \rho_2 = M_1\rho_1 \,.
$$

Ciò premesso, è evidente che moltiplicando ambi i membri delle tre

prime equazioni (*E*) e della (*F*) rispettivamente per θ_{23}, θ_{13}, $\frac{\theta_{12}\theta_{23}}{2\theta_{13}}$, θ_{12} sostituendo nella (*D*) viene

$$\left.\begin{array}{l} (\theta_{23}A+\theta_{13}A_1-\frac{\theta_{12}\theta_{23}}{2\theta_{13}}A_2-\theta_{12}A_3)\rho_2^2 \\ (\theta_{23}B+\theta_{13}B_1-\frac{\theta_{12}\theta_{23}}{2\theta_{13}}B_2-\theta_{12}B_3)\rho_2 \\ \theta_{23}C+\theta_{13}C_1-\frac{\theta_{12}\theta_{23}}{2\theta_{13}}C_2-\theta_{12}C_3 \end{array}\right\}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$

e qui non sarà inutilo avvertire como riesca facilissima questa operazione del moltiplicare θ_{23}, θ_{13} ec. pe' coefficienti A, A_1 ec. Avendosi infatti di tutti il logaritmo basterà eseguire delle semplici addizioni. Dopo ciò i coefficienti della (*G*) si ottengono prontamente mercè le note tavole colle quali dati i logaritmi di più numeri si passa al logaritmo della loro somma algebrica.

Ottenuto così un primo valore di ρ_2, sarà agevole trovarne il valore corretto colle formolo generali di approssimazione, le quali nel caso attuale, chiamando $\Delta\rho_2$ la correzione cercata, forniscono, per determinarla, l'equazione

$$0=(r_1+r_3+c_{13})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_3-c_{13})^{\frac{3}{2}}-6k(t_3-t_1)$$
$$+3(r_1+r_3+c_{13})^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{r_1}(2A\rho_2+B)+\frac{1}{r_3}(2A_3+B_3)+\frac{1}{c_{13}}(2A_2\rho_2+B_2)\right\}\Delta\rho_2$$
$$-3(r_1+r_3-c_{13})^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{r_1}(2A\rho_2+B)+\frac{1}{r_3}(2A_3+B_3)-\frac{1}{c_{13}}(2A_2\rho_2+B_2)\right\}\Delta\rho_2$$

nella quale entra la sola incognita $\Delta\rho_2$, adoprandovisi per r_1 r_3 c_{13} ρ_2 i valori numerici già prossimamente conosciuti.

In questa Nota mi son proposto di mostrare che, pel caso della parabola, la via de' tentativi può essere evitata. Confesso però francamente che io considero il vantaggio ottenuto aver qualcho peso soltanto dal lato analitico. Nelle applicazioni numeriche trovo preferibili precisamente lo falso posizioni, per la ragione che le calcolazioni da compiere per preparare la equazione di secondo grado in ρ_2 equivalgono bene a

quelle che *brevi calamo* si praticano nelle false posizioni di Olbers; col vantaggio per queste ultime che le brevi prove si controllano scambievolmente, mentre non si ha alcun criterio sulla esattezza delle operazioni fatte per ottenere l'equazione di secondo grado in ρ_1. A queste ragioni, cho io trovo perentorie, oserò aggiungere che, almeno in questa ricerca, le prove per tentativi hanno un'attrattiva speciale, forse perchè rompono la monotonia delle calcolazioni precedenti, o perchè, pur lasciando qualche cosa di arbitrario nella scelta fortunosa de'primi valori dell'incognita, danno immediatamente sicuro criterio a pronunziare se la cometa abbia o no passato pel perielio.






BIBLIOTECA